Preparazione esonero 15 maggio 2007

Aggiunte alcune risposte agli esercizi. Gli esercizi senza risposta sono o molto semplici o verranno svolti a lezione perché la risposta non è solamente numerica. In alcuni casi viene dato un suggerimento invece della risposta.

Valutazione di operazioni finanziarie

1. Si possono acquistare e piantare 10 alberi per 1000€. Questi alberi possono essere rivenduti dopo un anno al prezzo di 2000€, oppure dopo due anni al prezzo di 3000€. In entrambi i casi il taglio degli alberi comporta una spesa di 200€. Assumendo di essere in possesso di esattamente 1000€, e di poter investire durante i due anni al tasso del 10% annuo, scegliere l'operazione più conveniente dal punto di vista del REA al 12%.

   Ricordarsi la normalizzazione temporale.

2. Nell'esercizio precedente, scegliere l'operazione più conveniente con il criterio del TIR. Dire poi se esistono tassi di valutazione per i quali il criterio del REA sceglie diversamente dal criterio del TIR.

   Confrontare i grafici delle curve tasso di valutazione-REA dei due progetti. Le due parabole si intersecano solo per $\nu = 0$, pertanto REA e TIR scelgono allo stesso modo.

3. Un certo macchinario costa 10000€. Il suo costo operativo è di 2000€ alla fine del primo anno, e di 3000€ alla fine del secondo anno. Dopo 3 anni il macchinario va necessariamente sostituito. Assumendo che questo macchinario servirà per 6 anni, qual è il suo costo a un tasso di valutazione del 10%?

4. Rifare l'esercizio precedente assumendo che il macchinario servirà per sempre.

   Il REA in questo caso si trova con un limite.

5. Un macchinario costa 10000€, dura 4 anni e alla fine di ogni anno permette di guadagnare 3000€. Inoltre, alla fine dei 4 anni il macchinario può essere restituito ricevendo in cambio 2000€. Decidere con il criterio del TIR se acquistare tale macchinario, assumendo di poter investire durante questi 4 anni al 25%.

6. Abbiamo un deposito in banca che rende il 5% annuo effettivo. Sappiamo però che i prezzi aumentano tramite una legge esponenziale con tasso d'interesse del 2% annuo (si parla in tal caso di *inflazione* del 2%). Calcolare il "vero" rendimento annuo del nostro deposito bancario.

   Porsi la seguente domanda: se adesso investo 1 al tasso i, con il quale posso comprare adesso un bene A, quanto A posso comprare al tempo 1, se i prezzi salgono al tasso d'inflazione f? Al tempo 1 avrò $1 + i$, ma il bene A costerà $1 + f$, e quindi potrò comprarne solo $\frac{1+i}{1+f}$. Il "vero" rendimento dell'investimento è allora $\frac{1+i}{1+f} - 1$, e nel caso specifico viene 2.9%.

7. Si ha bisogno di affittare un appartamento per 6 mesi. Se ne trova uno al prezzo di 1000€ mensili, e si lascia un deposito non rimborsabile pari al primo mese d'affitto. Subito dopo si trova un appartamento identico che costa solo 900€ mensili. Assumendo che le rate d'affitto vengano pagate all'inizio del mese, che non si sia ancora pagata la prima rata d'affitto, e che il deposito venga rimborsato alla fine del sesto mese (solo se si è pagato l'affitto, ovviamente!), scegliere con il criterio del REA al 10% se conviene restare nel primo appartamento o passare al secondo. Per la normalizzazione, assumere di essere in possesso esattamente di $\{2000, 1000, 1000, 1000, 1000, 1000\}$ e di poter investire in questi 6 mesi al 10%.

8. Rifare l'esercizio precedente con il REA al 20%, e assumendo di poter investire al 20%.
9. Dire se le curve REA-tasso d'interesse degli affitti nell'esercizio 7 si intersecano.
10. Nell'esercizio 7, calcolare per quale tasso di valutazione il criterio del REA darebbe una risposta indifferente.

    Qual è l'equazione da risolvere per trovare i?

11. Un'industria concepisce un nuovo prodotto, il cui costo iniziale di produzione sarebbe di 10 milioni di euro. Indagini di mercato stimano che il prodotto resterebbe in commercio per 5 anni esatti, vendendo ogni anno 1 milione di unità, dopodiché diventerebbe obsoleto e la sua produzione terminerebbe. La produzione annuale richiederebbe 10000 ore di lavoro e 100 tonnellate di materiale grezzo, al costo attuale di 30€ per ora e 100€ per tonnellata, rispettivamente. Il prodotto si potrebbe vendere al prezzo di 3.3€ per unità durante i 5 anni. Il costo di produzione iniziale può essere detratto dalle tasse (che sono del 34%) in maniera uniforme durante i 5 anni. Calcolare il TIR, e dire poi se il progetto conviene al tasso di valutazione del 10%.
12. Abbiamo appena compiuto 90 anni, e vorremmo stipulare un contratto con una compagnia di assicurazioni che ci paghi 10000€ all'anno fino alla nostra morte. Sappiamo da statistiche affidabili che le probabilità di morire al compimento dell'anno

    $$\{91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101\}$$

    sono rispettivamente

    $$\{0.08, 0.12, 0.14, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.07, 0.05, 0.04\}$$

    Sapendo che la compagnia guadagna in genere il 10% su questo tipo di contratti, qual è il prezzo che ci dovrebbe venir chiesto?

    Usare il criterio del valor medio, e 10% come tasso di valutazione.

13. Dire quali tra le seguenti operazioni finanziarie ammettono TIR: $(-1000, 800, 100, -200, 400)$, $(-1000, 800, 100, 50)$, $(-100, 600, -800)$. Cosa si può dire sul segno del TIR nei primi 2 casi?

    $i_1 > 0$ (Norström), $i_2 \in (-1, 0)$ (Cartesio e buon senso).

14. Confrontare con il criterio del TIR le operazioni finanziarie $(1000, -800, -100, 200, -400)$ e $(2000, -800, 100, -1400)$.

Titoli obbligazionari e probabilità

1. Si acquistano delle obbligazioni. Il prezzo è 80€, il valore nominale 100€. Le cedole sono di 20€ (annue e posticipate). Le obbligazioni verranno rimborsate progressivamente in tre anni (1/3 alla fine di ciascun anno). Calcolare il tasso di rendimento effettivo per un'obbligazione rimborsata dopo 1, 2, 3 anni.

    1 anno: $i = 0.5$; 2 anni: $i = 0.36$; 3 anni: $i = 0.31$.

    Calcolare poi il tasso di rendimento dell'obbligazione con il criterio del valor medio.

    $i = 0.36$.

2. Un'obbligazione all'8% ha vita residua 6 anni e tasso di rendimento effettivo 9%. Calcolarne il valore, assumendo un valore facciale di 100€.

    Valore = 95.51.

3. Usando il criterio del valor medio, determinare il prezzo di un'obbligazione dal valore facciale di 100€, durata 4 anni, rimborsata progressivamente in maniera uniforme, con cedole al 15%. Usare un tasso di valutazione del 12%.

   $\boxed{\text{Prezzo} = 106.02.}$

4. Calcolare la probabilità che lanciando 3 volte un dado non si ottenga mai 4.

   $\boxed{(5/6)^3.}$

5. Calcolare la probabilità che lanciando 3 dadi non si ottenga nessun 4, sapendo che con uno dei 3 dadi si ottiene sempre 5.

   $\boxed{(5/6)^2.}$

6. Calcolare la probabilità che lanciando 3 volte un dado si ottenga almeno una volta 4.

   $\boxed{1-(5/6)^3.}$

7. Ci mettiamo d'accordo con un amico per il seguente gioco: da adesso per un anno, alla fine di ogni mese tireremo 3 dadi, e se uscirà almeno un 4 il nostro amico ci pagherà 100€. In caso contrario, saremo noi a pagargli 90€. Con il criterio del valor medio, e assumendo un tasso di valutazione del 2% mensile, decidere quanto bisognerebbe pagare (e chi dovrebbe pagare) per partecipare a questo gioco.

   $\boxed{\text{Il nostro amico dovrebbe pagarci } 105.26.}$

8. Calcolare media e varianza delle seguenti variabili aleatorie:

$$\{(1,0.4),(2,0.3),(3,0.2),(4,0.05),(5,0.05)\} \quad \boxed{\text{media} = 2.05, \text{varianza} = 1.2475}$$
$$\{(10,0.2),(20,0.2),(30,0.2),(40,0.2),(50,0.2)\} \quad \boxed{\text{media} = 30, \text{varianza} = 200}$$
$$\{(-3,0.3),(20,0.3),(-14,0.2),(32,0.1),(-25,0.1)\} \quad \boxed{\text{media} = 3, \text{varianza} = 317.8}$$

9. Per ciascuna delle variabili aleatorie dell'esercizio precedente, disegnare la funzione di ripartizione.

Contratti a termine, opzioni e arbitraggi

In questa sezione, indichiamo sempre con $F(t)$, $C(t)$ e $P(t)$ rispettivamente la funzione valore al tempo t di un forward, una call e una put su un sottostante privo di dividendi con funzione valore $A(t)$, con T la scadenza e con K il prezzo d'esercizio. Denotiamo poi con i il tasso privo di rischio su tutto il periodo $[0,T]$, supposto costante fino a scadenza. Dove non diversamente precisato, si assuma $i = 0$.

1. Sia $A(T) = \{(12,0.3),(8,0.7)\}$. Assumendo $K = 9$ e $i = 10\%$, determinare $F(0)$ con il criterio del valor medio.

   $\boxed{F(0) = \frac{2}{11}.}$

   Si dica per quali valori di A si ottiene un arbitraggio e descriverlo.

   $\boxed{\text{Si ha arbitraggio per qualunque prezzo a pronti } A(0) \neq \frac{92}{11}.}$

2. Nell'esercizio precedente, si assuma $A(0) = 10$ e si determini $F(0)$ con il principio di non arbitraggio.

   $F(0) = \frac{20}{11}$.

3. Nell'esercizio precedente, si determini K affinché $F(0) = 0$.

   $K = 11$.

4. Sia $C(0) = 12$, $K = 10$, $A(0) = 20$ e $i = 0$. Determinare $P(0)$.

   $P(0) = 2$.

5. Supponiamo che una call con prezzo d'esercizio 10€ costi 12€, e che il suo sottostante costi 20€. Quanto deve costare una put sullo stesso sottostante, con stessa scadenza e stesso prezzo d'esercizio, assumendo un tasso privo di rischio nullo?

   Fare da soli dopo aver fatto il precedente esercizio 4!

6. Si assuma $A(T) = \{(3, 0.7), (0.5, 0.3)\}$, $K = 1$ e $i = 0$. Si calcoli $C(0)$ con il criterio del valor medio.

   $C(0) = 1.4$.

7. Si determini un portafoglio composto esclusivamente da azioni A e soldi, che replichi a scadenza l'opzione dell'esercizio precedente (tale cioè che il valore del portafoglio alla scadenza T sia descritto anch'esso dalla variabile aleatoria $\{(2, 0.7), (0, 0.3)\}$.

   Il portafoglio contiene $\frac{4}{5}$ azioni e $-\frac{2}{5}$ soldi.

8. Si assuma come $C(0)$ il valore trovato nell'esercizio 6, e si supponga $A(0) = 2$. Usare il portafoglio replicante dell'esercizio precedente per costruire un arbitraggio. Dedurne quanto deve essere $C(0)$ affinché non sia possibile costruire un arbitraggio.

   Il valore del portafoglio al tempo T è lo stesso della call, qualunque eventualità si presenti. Quindi, quanto dovrebbe valere la call al tempo 0?

9. Si assuma che il titolo azionario A, di valore iniziale $A(0) = 20$, possa al tempo $t = 1$ solo aumentare o diminuire del 10%, e lo stesso al tempo $t = 2$. Si cerchi di costruire un portafoglio replicante di una call su A con prezzo d'esercizio $K = 20$, cioè un portafoglio il cui valore sia lo stesso della call per $t = 2$, assumendo di non modificare la composizione del portafoglio al tempo $t = 1$. Si spieghi perché non è possibile.

   Perché si dovrebbe risolvere un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite.

10. Nell'esercizio precedente, si costruisca un portafoglio replicante assumendo di poterlo modificare al tempo $t = 1$.

11. Nell'esercizio 9, si calcoli $C(0)$ con il modello binomiale di Cox-Ross-Rubinstein.

12. Disegnare il grafico del payoff di un portafoglio composto da una call e da una put a debito (sullo stesso sottostante, con stessa scadenza e stesso prezzo d'esercizio) in funzione del valore del sottostante.

13. Disegnare il grafico del payoff di un contratto a termine, in funzione del valore del sottostante.